9章 倍数算 の「偏差値20アップ・指導法」

まとめ

1　導入
根本原理
- ①　一方が一定
- ②　和が一定
- ③　差が一定
- ④　一定なし

→ 関連づける → 2　例題で解説 → 関連づける → 3　問題演習

※　このように、「①導入で根本原理」をしっかり指導し、「②その根本原理を例題でイメージさせ」、その後に自習として「③問題演習をさせる」と、うそのように簡単に成績は上がるのです。下の具体例で確認してください。

9.1　導入（倍数算の根本原理を指導）

● 倍数算が苦手となる理由 … 倍数算は「比の応用」であり、本来難しいのですが、解き方が決まっていますので、①「倍数算を発見」でき、②「解き方」さえ知れば対策が容易なテーマです。「倍数算の構造（A:BがC:Dに変わる）が分かっていないと倍数算と気づきませんし、また「倍数算」と気づいたとしても「倍数算の特殊な解き方」をマスターしていない子もやはり解けません。ここでは、一般的な解き方として、（1）「一定なものに着目して表をかいて解く方法」と、計算力がある子向けの（2）「比例式で解く方法」をご紹介します。どちらにしてもその使い方、効果を知った上で使いこなせるようにしましょう。

２０アップ攻略法 ① ▷ 「Ａ：Ｂ＝Ｃ：Ｄ　が→Ｅ：Ｆ＝Ｇ：Ｈ　になる」という問題は、「倍数算」！

- はじめ「Ａ：Ｂ＝Ｃ：Ｄ」だったのが　⇒「Ｅ：Ｆ＝Ｇ：Ｈ」に変化した。というように、比の倍数関係が変化する問題を「倍数算」という。
- 倍数算の出題パターンは次の4パターンです。

  - ①「一方が一定」… 例題1
  - ②「和が一定」… 例題2
  - ③「差が一定」… 例題3
  - ④「一定なし」… 例題4

  → これらは、すべて、「比例式による解法」の一つの解き方で解け、また、「比例式自体」も様々な問題で活用できる。

発展学習 ① ▷「分配法則」と「移項」→ 比例式・消去算などで活用できる！

●「比例式で解く方法」では、少々難しい（中1レベルの）計算をすることになります。計算が得意な子で、この計算を難なく理解できるようであれば、「ニュートン算」、「つるかめ算」、「流水算」、「年齢算」などのほとんどの「特殊算」や、「速さ」など様々な文章題を、「消去算（連立方程式）（中2レベル）」で解くことが可能となります。最近の入試傾向からすると、本番で、「〇〇算だ！」となかなか気づけない難しい問題が出されますので、本来の解き方をマスターした後、6年生の後半で、裏技として、「消去算（連立方程式）」で解く方法も身に着けるとよいでしょう。

（1）分配法則 …（Ａ＋Ｂ）×Ｃ＝Ａ×Ｃ＋Ｂ×Ｃ

例　（③＋４００円）×２＝③×２＋４００×２

（③+400円）を、③円と400円が入っている1袋と考え、これを2倍するのだから、③も400円も両方とも、2倍する必要がある（2を分配してかける）。

（2）移 項（いこう）… Ａ＋Ｂ＝Ｃ＋Ｄ　→　Ａ－Ｄ＝Ｃ－Ｂ

数を、イコール（＝）の反対側に移すことを「移項」と言います。

例　⑥＋200＝④＋800
→　⑥+~~200~~－④－~~200~~＝~~④~~+800－④－200
→　⑥－④＝800－200
→　②＝600

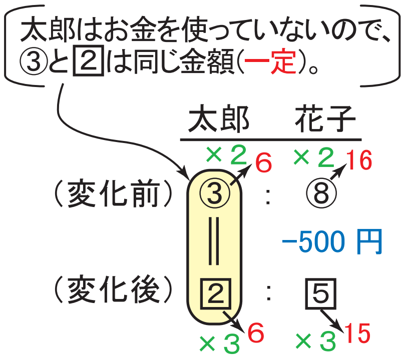
④を左辺に移すために、両辺から④を引き、200円を右辺に移すために、両辺から200円を引く。
その結果、④は左辺に移り、200は右辺に移り、＋－が逆になる。

9.2 例題（倍数算の根本原理を確認）

例題1　「一方が一定」の倍数算　…　太郎の持っている金額が変わらないことに着目！

太郎と花子のはじめに持っていたお金の比は3：8でしたが、花子が500円使ったので、その比が2：5となりました。はじめに太郎が持っていたお金は何円ですか。

【解法１】　一定なものに着目して「表」を使って解く方法



- 太郎の所持金は変わっていないのに、変化前は③、変化後は 2 と比が違う。
- 太郎の所持金は、同じ金額（一定）なので、③と 2 を、これらの最小公倍数6にそろえる。⇒　〇つきの数字は2倍、□つきの数字は3倍すると、太郎と花子の（変化前の比）は 6 ： 16 、（変化後の比）は 6 ： 15となる。
- 花子の変化に着目すると、16が15に減っているので、
  16 － 15 ＝ 1　…　これが500円ということになる。
- したがって、はじめに太郎が持っていた金額は、
  500円 × 6 ＝ 3000円

【解法２】　比例式を使って解く方法

- 太郎と花子の所持金の比は、はじめ ③:⑧ であったが、花子だけ、500円使ったので、花子は、（⑧－500円）となる。これが 2 ： 5 に等しい。
- この関係を、「比例式」にすると、
  ③ ：（⑧－500円）＝ 2 ： 5　となり、
  ③ ×5 ＝（⑧－500円） × 2
  ⑮ ＝ ⑯ － 1000円　より、　① ＝ 1000円
- したがって、はじめに太郎が持っていた金額は、
  1000円 × ③ ＝ 3000円

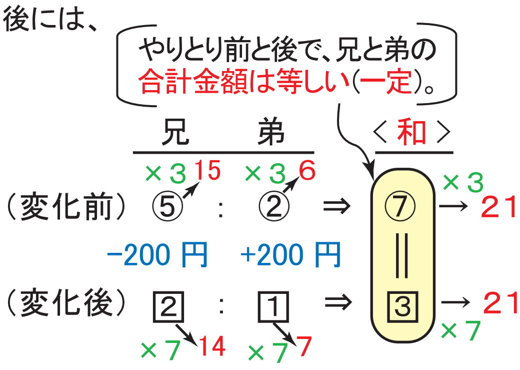
20アップ･ノウハウ
(⑧－500円)を1袋と考え、これを2倍するから、⑧も500円も両方とも、2倍する。

20アップ･ノウハウ
⑮＝(⑯－1000円)は、左のような線分図を書いて①当たりの量を求める。

例題2　「 和が一定 」の倍数算　…　「やりとり前」と「やりとり後」で、「２人の合計金額」が等しいことに着目！

兄と弟の所持金の比は、5：2 でしたが、兄が弟に200円あげたので、兄と弟の所持金の比は 2：1 になりました。はじめ、兄は何円持っていましたか。

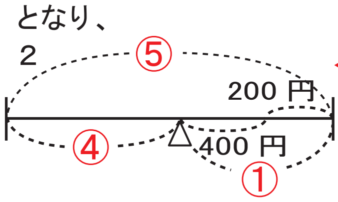
【解法１】　和が一定であることに着目して「表」を使って解く方法



- 兄と弟の所持金の比の「和」は、はじめ ⑤＋②＝⑦となるが、やりとり後には、2 ＋ 1 ＝ 3 となる。
- 兄のサイフから弟のサイフに200円移しただけなので、やりとりの前と後で、2人の合計金額は変わらないことに着目すると、
- ⑦と 3 は等しいので、これらを、最小公倍数の21にそろえる。このため、〇つきの数字は3倍し、□つき数字は7倍し、比を合わせる
- 比を修正した結果、兄は15から14に1減っているから、この1が弟にあげた200円ということになる。
- したがって、はじめ兄が持っていた金額は、
  200円 × 15 ＝ 3000円

【解法２】　比例式を使って解く方法

- 兄と弟の所持金の比は、はじめ、⑤:②であったが、兄は200円減らし（⑤－200円）となり、弟は200円増え（②＋200円）となる。
- これらが 2 ： 1 になるから、
  （⑤－200円）：（②＋200円） ＝ 2 ： 1　となり、
  （⑤－200円） × 1 ＝（②＋200円） × 2
  ⑤ － 200円 ＝ ④ ＋ 400円
  ① ＝ 400 ＋ 200 ＝ 600円
- したがって、 600円 × ⑤ ＝ 3000円

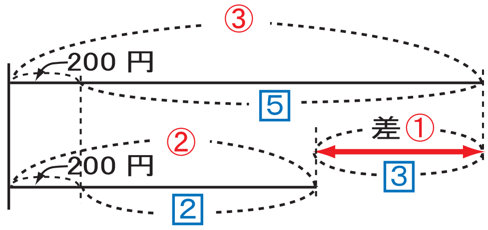


20アップ･ノウハウ
(②+200円)を1袋と考え、これを2倍するから、②も200円も両方とも、2倍する。

20アップ･ノウハウ
⑤－200＝④+400 は、上のような線分図を書いて①当たりの量を求める。

例題3　「 差が一定 」の倍数算 … 同じ金額を足したり引いたりしても「2人の金額の差」が等しいことに着目！

Ａ君とＢ君の所持金の比は、３：２でしたが、2人とも200円ずつ使ったので、Ａ君とＢ君の所持金の比は５：２になりました。Ａ君のはじめの所持金は何円ですか。



【考え方】

- ＡとＢの所持金の比の「はじめの差 ①(＝③−②)」と、「変化後の差 [3](＝[5]−[2])」は、左の図より、等しいことが分かる。

同じ金額ずつ減らす場合、いつでもＡとＢの金額の「差」は等しい(一定)。

【解法１】 差が一定であることに着目して「表」を使って解く方法

- 右の表より、「はじめの差 ①」と「変化後の差 [3]」は等しいので、「最小公倍数３」に合わせるため、○つき数字は「３倍」、□つき数字は「１倍」する。
- 比を修正した結果、Ａ君は９から５に４減っているから、この４が使った２００円となります。
- したがって、はじめにＡ君が持っていた金額は、

　２００円 ÷ ４ × ９ ＝ ４５０円

	A		B		＜差＞
(変化前)	③ ×３→９	：	② ×３→６	⇒	① ×３→３
	−200 円		−200 円		‖
(変化後)	[5] ×１→５	：	[2] ×１→２	⇒	[3] ×１→３

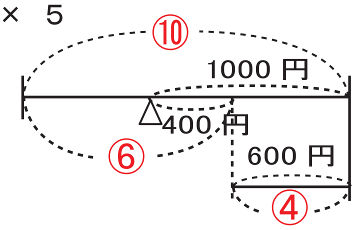
【解法２】 比例式を使って解く方法

- Ａ君とＢ君の所持金の比は、はじめ、③:②であったが、２人とも２００円ずつ使ったので、Ａ君は(③−２００円)となり、Ｂ君は(②−２００円)となる。
- これらが ５ ： ２ になるから、

　(③−２００円)：(②−２００円) ＝ ５ ： ２　となり、
　(③−２００円) × ２ ＝ (②−２００円) × ５
　⑥ − ４００円 ＝ ⑩ − １０００円
　④ ＝ １０００ − ４００ ＝ ６００円

- したがって、

　６００円 ÷④ × ③ ＝ ４５０円



２０アップ・ノウハウ
(③−200円)を1袋と考え、これを2倍するから、③も200円も両方とも、2倍する。

２０アップ・ノウハウ
⑥−400 ＝ ⑩−1000 は、左のような線分図を書いて①当たりの量を求める。

例題4　「 一定なし 」の倍数算(倍数変化算) … 一定のものがなく、倍数関係が完全に変化している問題！

姉と妹の貯金額の比は、５：３でしたが、姉は750円使い、妹は100円貯金したので、姉と妹の貯金額の比は、３：4になりました。はじめの姉の貯金額はいくらでしたか。

【考え方】 この問題は、「一定のものがない」ので、
「仮に、変化後の比 ③:④ が同じ比の、⑫:⑫だったら」と考える。

【解法１】 ２人の比を合わせて、「表」で解く方法

- 変化後の比の ③と④ を最小公倍数の⑫に合わせ、同じ比にするため、→姉の数字を全て４倍して、妹の数字も全て３倍する。
- その結果、「姉は、２０の貯金額から 3000 円引いたら⑫となり」、「妹は、９の貯金額に 300 円足したら１２となり」どちらも⑫と比がそろった。
- この結果、姉と妹のはじめの金額の比の差２０−９＝１１は、３０００＋３００＝３３００円と等しいことになる。
- したがって、はじめの姉の貯金額は、

　３３００円 ÷ １１ × [5] ＝ １５００円

	姉		妹
(変化前)	[5] ×４→２０	：	[3] ×３→９
	−750 円 ×４→−3000 円		+100 円 ×３→+300
(変化後)	③ ×４	：	④ ×３
	⑫	＝	⑫

一定のものがないので、「変化後の比が仮に、同じ ⑫ 」だったとする。

【解法２】　比例式を使って解く方法

- 姉と妹の貯金額の比は、はじめ、⑤:③であったが、姉は７５０円使ったので、（⑤ー７５０円）となり、妹は１００円貯金したので、（③＋１００円）となる。
- これらが　３ ： ４　になるから、

　（⑤ー７５０円）:（③＋１００円）＝　３ ： ４　となり、
　（⑤ー７５０円）×　４　＝（③＋１００円）×　３
　⑳　ー　３０００円　＝　⑨　＋　３００円
　⑪　＝　３０００　＋　３００　＝　３３００円

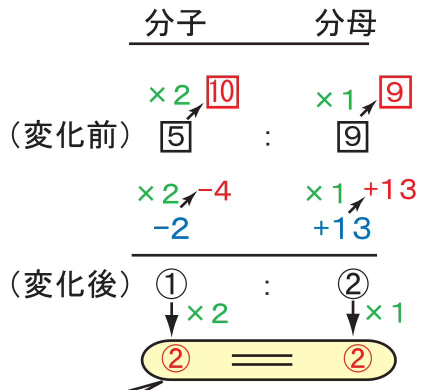
- したがって、

　３３００円　÷　⑪　×　⑤　＝　**１５００円**

例題５　一見、倍数算に見えない倍数算 … A : B ＝ C : Dが → E : F ＝ G : H に変化する形を発見！

ある分数を約分すると $\frac{5}{9}$ になります。このある分数の分母に13を加え、分子から2を引いて約分すると $\frac{1}{2}$ になります。このある分数を求めなさい。

【考え方】



- $\frac{5}{9}$ を、$\boxed{5}$: $\boxed{9}$ と比の形にすると、この分子の $\boxed{5}$ から２を引き、分母の $\boxed{9}$ に１３を加えた結果が ①:② になるので、倍数算ととらえられる。
- さらに、一定のものがない、「一定なしの倍数算」なので、「仮に、変化後の比 ①:② が同じ比の、②:②だったら」と考える。

一定のものがないので、「変化後の比が仮に同じ②」だったとする。

【解法１】　２つの比を合わせて「表」を使って解く方法

- 変化後の比の ①と② を最小公倍数の②に合わせ、同じ比にするため、
　→ 分子の数字を全て２倍して、分母の数字は全て１倍する。
- その結果、「分子は、$\boxed{10}$ から４引いたら②となり」、
　「分母は、$\boxed{9}$ に１３足したら②となり」どちらも②と比がそろうことになる。
- この結果、分子と分母のはじめの比の差 $\boxed{10}$ ー $\boxed{9}$ ＝ $\boxed{1}$ が、
　４　＋　１３　＝　１７　と等しいことになる。
- したがって、はじめの分子は、

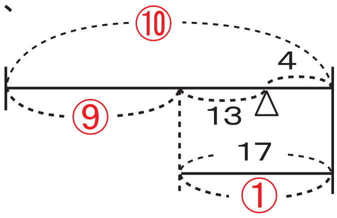
　１７　×　$\boxed{5}$　＝　８５
　分母は、　１７　×　$\boxed{9}$　＝　１５３

- よって、求めるべき、ある分数は、　$\frac{85}{153}$

【解法２】　比例式を使って解く方法

- 分子と分母のはじめの比は、⑤:⑨であったが、分子は２を引いて（⑤ー２）となり、分母は１３増え（⑨＋１３）となる。
- これらが　２ ： １　になるから、

　（⑤ー２）:（⑨＋１３）＝　１ ： ２　となり、
　（⑤ー２）×　２　＝（⑨＋１３）×　１
　⑩　ー　４　＝　⑨　＋　１３
　①　＝　１３　＋　４　＝　１７



- したがって、　分子は　１７　×　⑤　＝　８５
　　　　　　　　分母は　１７　×　⑨　＝　１５３
- よって、求めるべき、ある分数は、　$\frac{85}{153}$

２０アップ・ノウハウ
（⑤ー２）を1袋と考え、これを2倍するから、⑤も2も両方とも、2倍する。

２０アップ・ノウハウ
⑩ ー ４ ＝ ⑨ ＋ １３ は、左のような線分図を書いて①当たりの量を求める。