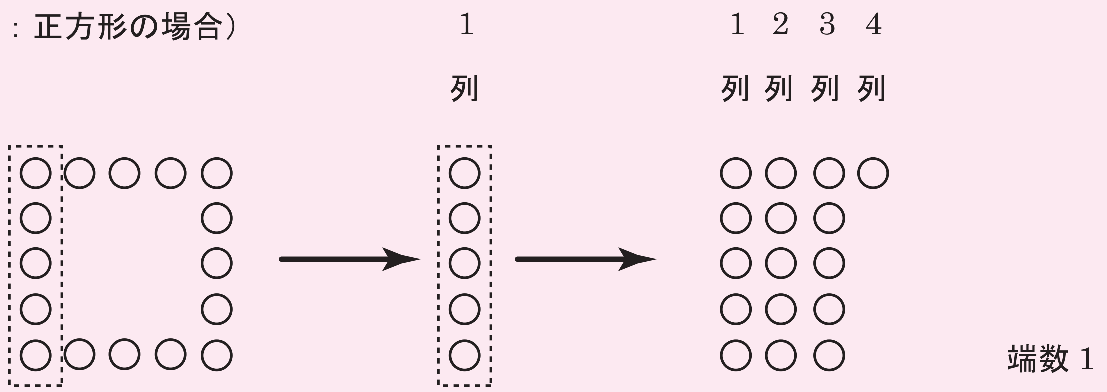
桜蔭中 ー注目問題 詳細解説（その２）ー 2006年[平成１８年]

第三問　数の性質・規則性の調べあげ ⇒ 確実に解けなければならない問題（偏差値65）

正多角形の辺の上に石が並んでいます。どの辺にも等間隔に同じ個数の石が並んでいます。1つの辺に並んでいる石を残し、他の石を取り除き、残った石を縦に並べ1列目とします。次に、取り除いた石を2列目から1列目と同じ個数ずつ並べ、すべての石を並べて列を作ります。

最後の列の石の個数が1列目の石の個数より少ないとき、その個数を「端数」と表します。最後の列の石の個数が1列目の石の個数と同じとき、「端数」は0と表します。1つの辺に並んでいる石の個数は3個以上とします。

（例：正方形の場合）



(1)つぎのアからウの$\boxed{}$に数字を入れなさい。
　正五角形で石の総数が55個のとき、1つの辺に並んでいる石は$\boxed{\text{ア}}$個です。
　上のように縦の列に並べると最後の列は$\boxed{\text{イ}}$列目で。端数は$\boxed{\text{ウ}}$です。

(2)正五角形の辺の上に石が並んでいます。列を作った後の最後の列は4列目で、端数3でした。石の総数を求めなさい。

(3)正十二角形の辺の上に石が並んでいます。列を作った後の端数は0でした。
　1つの辺に並んでいる石の個数として考えられるものをすべて求めなさい。

根本原理　「倍数の概念」をイメージできるかどうか

「倍数のイメージ」

　例えば、次のような関係を文章から発見して、応用できるかが重要である。

①何らかの数Nを５倍した数⇒N×５と書けたら⇒「５の倍数」ととらえられるし、

②何らかの数Nが５で割り切れた場合⇒N÷５ができたら⇒「Nは５の倍数」である。

攻略法　桜蔭中の傾向「丁寧に調べていけば解ける」ということを知ろう！！

桜蔭中は、本問のように、決まった解き方がない「調べさせる問題」や、「条件を整理させる問題」がよく出る傾向にあります。本年度も、この傾向は変わっておらず、本問は典型的な「桜蔭の問題」と言えるでしょう。

ただ、丁寧に調べあげれば、比較的簡単に答えにたどりつきますし、（３）などは、「すべて求めなさい」ということなので、部分点が確実にもらえるので、このような問題に慣れておくことが重要と言えます。

解き方　「中空方陣」の考え方を利用して解く！

（１）正五角形の場合、右の［図1］のように、中空方陣の考え方を使い、
５つのかたまりと見ることができる。これより、
正五角形の1辺に並んでいる石の個数は、

５５　÷　５　＝　１１個・・・　1かたまりの個数　より、

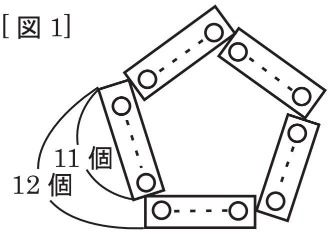
１１個　＋　１　＝　１２個・・・ $\boxed{ア}$（1列の個数）

最後の列と端数は、

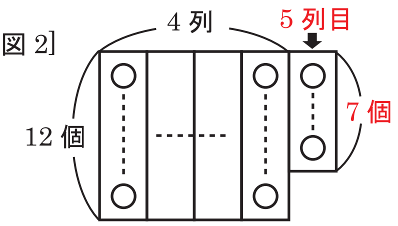
５５　÷　１２　＝　４列　あまり　７個　より、

最後の列は　５列目（ $\boxed{イ}$ ）で、　端数は７個（ $\boxed{ウ}$ ）となる。

［図 1］



［図 2］



（２）右の［図3］より、正五角形上の石の総数は「Ｎ×５」
と表せるので「⑤の倍数」である。
また、［図4］より「（Ｎ＋１）×３列＋３」とも表わせ、３で割れるので、
「③の倍数」でもあると分かる。このため、求める石の総数は、
『⑤と③の公倍数（⑮の倍数）』の「１５、３０、４５・・・」のどれかである。

＜１５の場合＞

Ｎ×５＝（Ｎ＋１）×３＋３
が成り立ち、Ｎ＝３個と出るが、

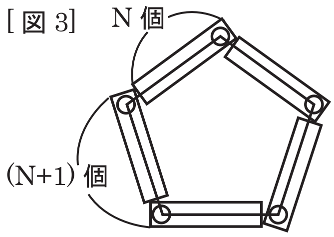
ここが合否の分かれ目！
『１５の倍数』にまでしぼりこめるかが重要。

＜３０の場合や４５の場合など他の場合＞は、

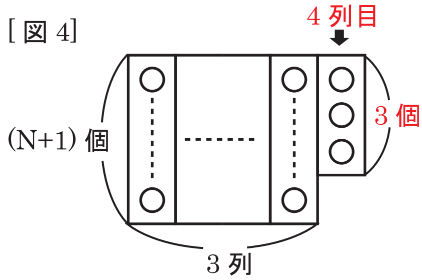
Ｎ×５＝（Ｎ＋１）×３＋３が成り立たない。

したがって求める石の総数は、１５個である。

［図 3］



［図 4］



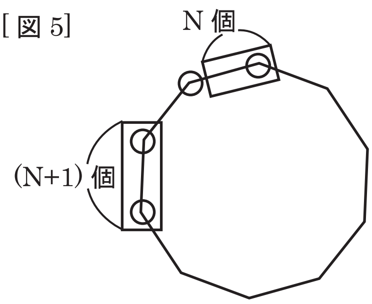
（３）　石の総数は、［図5］より、「Ｎ×１２」、
［図6］より、「（Ｎ＋１）×□」と表わせるから、
このＮに1つずつ当てはめて答えを探し出すと、

1つの辺の石の数は、3個以上だから、3個から調べればよい。

（総数）		（例の数）				
Ｎ×１２	＝	（Ｎ＋１）	×	□		
２×１２	＝	３	×	８	＝	２４個
３×１２	＝	４	×	９	＝	３６個
４×１２	＝	~~５~~	×	なし		
５×１２	＝	６	×	１０	＝	６０個
６×１２	＝	~~７~~	×	なし		
７×１２	＝	~~８~~	×	なし		
８×１２	＝	~~９~~	×	なし		
９×１２	＝	~~１０~~	×	なし		
１０×１２	＝	~~１１~~	×	なし		
１１×１２	＝	１２	×	１１	＝	１３２個

したがって1辺にならんでいる石の個数は　３個、４個、６個、１２個　となる。

［図 5］



［図 6］