16章 場合の数 の「偏差値20アップ・指導法」

まとめ

1 導入

根本原理
- ① 順列（樹形図・公式）
- ② 組合せ（樹形図・公式）
- ③ その他

→ 関連づける → 2 例題で解説 → 関連づける → 3 問題演習

※ このように、「①導入で根本原理」をしっかり指導し、「②その根本原理を例題でイメージさせ」、その後に自習として「③問題演習をさせる」と、うそのように簡単に成績は上がるのです。下の具体例で確認してください。

20アップ攻略法 ① ▷ まず、「順列」の根本原理をしっかり覚えよう！

(1) **順列** … [12] と [21] は、同じ「1と2の組」ですが、順番が違うので、「2通り」と考えます。
このように順番が違うものは違うものとして順にならべる「並べ方」を「順列」と言います。

【例】 1, 2, 3 の3枚から2枚を選んで、順番に並べる「並べ方（順列）」は何通りあるか考えましょう。
（2ケタの整数が何通りできるかという問題と同じことになります。）

A パターン（ 順列を「樹形図」で解く方法 ）

1 < 2 …(12), 3 …(13)
2 < 1 …(21), 3 …(23)
3 < 1 …(31), 2 …(32)

（十の位の数）になることができるのは、1,2,3の3通りあり、このそれぞれにつき、（一の位）になることができる数は2通りずつある。それを漏れなく調べ上げる方法として、左のような樹形図をかくと、6通りと分かる。

B パターン（ 順列を「公式」で解く方法 ）…3個の中から2個選んで並べる「順列」を「$_3$並$_2$」と表すことにすると、

$_3$並$_2$ ＝ 3×2 ＝ 6通り

（十の位の数）になることができる3通りのそれぞれにつき、（一の位）になることができる数は2通りずつある。そのため「積の法則」より3×2の6通りとなる。

20アップ攻略法 ② ▷ 次に、「組合せ」の根本原理をしっかり覚えよう！

(2) **組合せ** … [12] と [21] は、「並べ方（順列）」としては、上記のように「2通り」ですが、「1と2を選ぶ」という「選び方（組合せ）」としては、「1通り」と考えます。
このように順番が違っても、選び方としては同じと考え、この「選び方」を「組合せ」と言います。

【例】 1, 2, 3 の3枚から2枚を選ぶ「選び方（組合せ）」は何通りあるか考えましょう。
（掃除当番などを2人選ぶ選び方は何通りあるかという問題と同じこととなります。）

C パターン（ 組合せを「樹形図」で解く方法 ）

1 < 2 …(12), 3 …(13)
2 < ~~1 …(21)~~, 3 …(23)
~~3 < 1 …(31), 2 …(32)~~

組合せの樹形図は順列の樹形図とは違い、同じ組合せを重複してかかないように、左に1をかいたら次は1以上をかき、2をかいたら次は2以上をかくようにする。このようにかくと左のような樹形図となり、選び方（組合せ）は、[12], [13], [23] の3通りとなることが分かる。

D パターン（ 組合せを「公式」で解く方法 ）…3個の中から2個選ぶ「組合せ」を「$_3$選$_2$」と表すことにすると、

$$_3選_2 = \frac{3\times2}{2\times1} = 3通り$$

より詳しい式は、

$$_3選_2 = \frac{_3並_2}{_2並_2} = \frac{3\times2}{2\times1} = 3通り$$

① まずBパターンと同様に、3個の中から2個選んで並べる「順列」を出す。
$_3$並$_2$ ＝ 3×2 ＝ 6通り。

② しかし、これでは、[12], [21] などのように、同じ組合せにもかかわらず、2通りと数えてしまう組が出てきてしまう。これは、選んだ2個（例えば「1と2」）の並べ方が、「 $_2$並$_2$ ＝ 2×1 ＝ 2通り 」できてしまうからである。そこで、順列の6通りを、2で割らなければならないのである。

例題 1　「順列」と「組合せ」を混合した問題（その1）… 公式どおりに解けない問題

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ の5枚のカードから3枚を取り出して並べ、3ケタの整数を作ります。

（1） 3の倍数は何通りできますか。
（2） 9の倍数は何通りできますか。
（3） 4の倍数は何通りできますか。
（4） 6の倍数は何通りできますか。

２０アップ攻略法 ③ ▷ まずはじめに「組合せ」などを使い、その後「順列」を使う解き方！

本問（1）のように、はじめ「組合せ」を使い、次に「順列」を使う2段階に分けて解く問題がよく出る。
《ステップ 1》 まず問題の条件に合う「組合せ」などをあげる。その後、
《ステップ 2》 それぞれの組合せの並べ方である「順列」などを考えて解く。

【解き方】

(1)**《ステップ1》** まず各位の数の和が3の倍数となる3つの数字の「組合せ」は、
{1, 2, 3}、{1, 3, 5}、{2, 3, 4}、{3, 4, 5}の4組ある。
しかし、これらの各組とも、その「並べ方」までは考えていないので、

《ステップ2》 次に、各組の中の数字の並べ方（$_3$並$_3$「順列」）を考えると、
3 × 2 × 1 ＝ 6 通り ずつあるから、3の倍数は、
4 × 6 ＝ <u>24 通り</u>

20アップ・ノウハウ
☜ まず「組合せ」を求める

1 ─ 2 ─ 3
1 ─ 3 ─ 5
2 ─ 3 ─ 4
3 ─ 4 ─ 5

20アップ・ノウハウ
☜ 次に「順列」を求める

(2)**《ステップ1》** まず各位の数の和が9の倍数となる3つの数字の「組合せ」は、
{1, 3, 5}、{2, 3, 4}の2組ある。
しかし、これらの各組とも、その「並べ方」までは考えていないので、

《ステップ2》 次に、各組の中の数字の並べ方（$_3$並$_3$「順列」）を考えると、
3 × 2 × 1 ＝ 6 通り ずつあるから、9の倍数は、
2 × 6 ＝ <u>12 通り</u>

(3)**《ステップ1》** 下2ケタが00か、4の倍数となる2ケタの整数（「順列」）は、
12，24，32，52 の 4通りある。
（ここで21とか、42は4の倍数ではないので含めない。）

《ステップ2》 次に、上の 4 通りのどの場合も、
百の位の数が、3通り ずつあるから、
4 × 3 ＝ <u>12 通り</u>

例えば、下2ケタが「 12 」の場合

《百》
3
4 ＞ 12
5

20アップ・ノウハウ

《3の倍数の見つけ方》
各位の数字の和が3の倍数となれば、3の倍数となる。

《4の倍数の見つけ方》
下2ケタの数字が00か、または、4の倍数ならば、その数は、4の倍数となる。

《6の倍数の見つけ方》
①1の位が偶数で、しかも、
②各位の数字の和が3の倍数であれば、その数は、6の倍数となる。

《9の倍数の見つけ方》
各位の数字の和が9の倍数となれば、9の倍数となる。

(4)**《ステップ1》** まず(1)より、各位の数の和が3の倍数となる3つの数字の「組合せ」は、{1, 2, 3}、{1, 3, 5}、{2, 3, 4}、{3, 4, 5}の4組ある。

《ステップ2》 次に、6の倍数になるため、一の位が偶数になるように、
各組の中の数字の並べ方（「順列」）を考えると、

	《偶数の一の位の数》	《百》《十》《一》
{1, **2**, 3} ⇒	1の位は2だけで1通り ⇒	2 × 1 × 1通り ＝ 2 通り
{1, 3, 5} ⇒	1の位はなし ⇒	なし
{**2**, 3, **4**} ⇒	1の位は2, 4の 2通り ⇒	2 × 1 × 2通り ＝ 4 通り
{3, **4**, 5} ⇒	1の位は4だけで1通り ⇒	2 × 1 × 1通り ＝ 2 通り

したがって、6の倍数は、
2 ＋ 4 ＋ 2 ＝ <u>8 通り</u>

20アップ・ノウハウ

《7の倍数の見つけ方》
下3ケタの数と上2ケタの数の差が7の倍数であれば、その数は、7の倍数となる。

《8の倍数の見つけ方》
下3ケタの数字が8の倍数であれば、その数は、8の倍数となる。

例題2　「順列」と「組合せ」を混合した問題（その2）… 公式どおりに解けない問題

0, 2, 2, 3, 7 の5枚のカードから3枚を取り出して並べ、3ケタの整数をつくります。
（1）全部で何通りの整数ができますか。
（2）大きい方から数えて10番目の整数を求めなさい。
（3）偶数は何通りできますか。
（4）3の倍数は何通りできますか。

２０アップ攻略法④ ▶「公式・計算」と「樹形図」をたくみに使いこなそう！

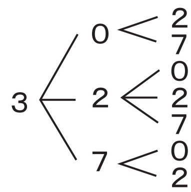
① 一定の決まりがあるとき ⇒「公式・計算」で解こう！
② 一定の決まりがないとき ⇒「樹形図」をかいて調べよう！

【解き方】
（1）百の位が「2」のときと、「3」のときと、「7」のときでは決まりが違うので、それぞれに分けて分析する。

① **百の位が 2 のとき** ⇒ 十の位と一の位は、0, 2, 3, 7 の4つの数字を順に並べることになり、
「4つの中から2つを選んで、並べる［順列（$_4$並$_2$）］」と同じことになるから、
$_4$並$_2$ ＝ 4 × 3 ＝ 12 通り

20アップ・ノウハウ
場合わけをして調べる！

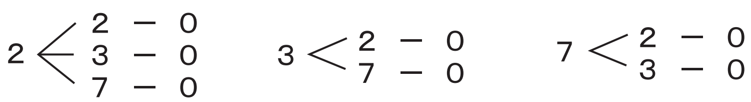
② **百の位が 3 のとき** ⇒ これは、樹形図で調べると右のようになるから、
7 通り となり、



② **百の位が 7 のとき** も ⇒ 百の位が 3 のときと同じになるから、
7 通り となり。　したがって、できる整数は全部で、
12 ＋ 7 × 2 ＝ 26 通り

（2）全部で26通りあるので、
26 － 10 ＋ 1 ＝ 17 番目 …（小さい方から17番目）
200台の数は(1)より、12通りあるので、
17 － 12 ＝ 5番目 …（300台で、小さい方から5番目）
300台の整数を順に書くと、302, 307, 320, 322, 327, …となるから、求める整数は、327

（3）できる偶数の一の位は「 2 」か「 0 」である。
① **一の位が 2 のとき** ⇒ 百の位と十の位に
0, 2, 3, 7 のうち2つを並べればいいから、
3 × 3 ＝ 9 通り
② **一の位が 0 のとき** ⇒ 下の樹形図より、7通り

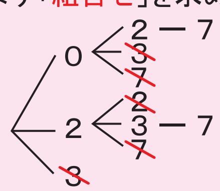


したがって、偶数は、全部で、
9 ＋ 7 ＝ 16 通り

20アップ・ノウハウ
① 一の位が2のときは、残りが0, 2, 3, 7で、異なる数字ばかりで、同じ数字がないから、計算で求められる。
② 一の位が0のときは、残りが2, 2, 3, 7で、同じ数字があるから計算では求まらないので、樹形図をかいて調べる。

（4）《ステップ1》 まず各位の数の和が3の倍数となる3つの数字の「組合せ」は、
{0, 2, 7}、{2, 3, 7} の 2組 ある。
しかし、これらの各組とも、その「並べ方」までは考えていないので、
《ステップ2》 次に、各組の中の数字の並べ方（「順列」）を考えると、
{0, 2, 7} ⇒ 2 × 2 × 1 ＝ 4 通り
{2, 3, 7} ⇒ 3 × 2 × 1 ＝ 6 通り
したがって、3の倍数は、
4 ＋ 6 ＝ 10 通り

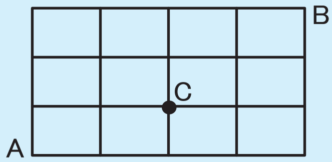
20アップ・ノウハウ
☜ まず「組合せ」を求める



20アップ・ノウハウ
☜ 次に「順列」を求める

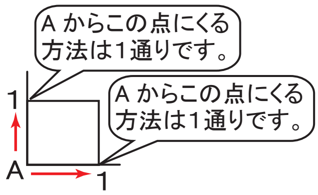
例題③ 道順の問題と「組合せ」 … 図に書き込む解き方と「組合せの公式」で解く方法

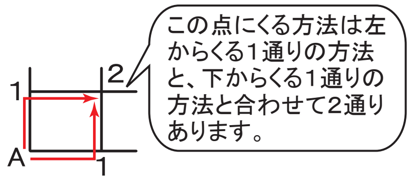
右のような碁盤の目をした道があります。この道に沿って、A から B まで遠回りしないで進むとき、次の問いに答えなさい。
（1） 何通りの行き方がありますか。
（2） C 地点を通らずに行く方法は何通りありますか。

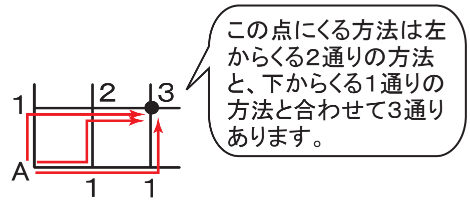


【考え方 1】 交差点に数字を書いていく解き方

遠回りしないで進むということは、右か上にしか進めないということです。そこで、各交差点に、各交差点までの行き方の数を書き込んでいくと、下の図のようになります。



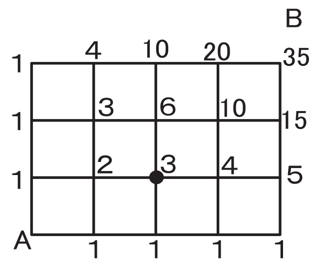




【解き方 1】

（1） 各交差点に、各交差点までの行き方の数を書き込んでいくと、右の図のようになります。 したがって、 A → B まで行く方法は、

35 通り です。

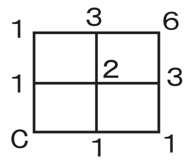


（2） まず、A から C を通って B まで行く方法を考える。そのため、A → C と、C → B に分けて考えると、A → C までの行き方は3通りあり、このそれぞれについて、C → B までの行き方が6通りあるから、A から C を通って B まで行く方法は、「積の法則」より、

3 × 6 ＝ 18 通り　　したがって、

C 地点を通らずに行く方法は、

35 － 18 ＝ 17 通り



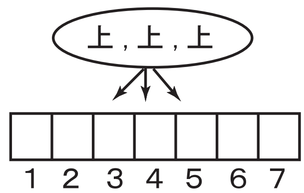
【考え方 2】 組合せの公式を利用する解き方

1	2	3	4	5	6	7
右	右	上	上	右	右	上

どの道すじを通る場合でも、右に4回、上に3回進むから、
右右上上右右上 や 上右右上右右上 などのように、右4個と上3個の7個の文字を1列に並べる方法の数と同じである。

この方法で行き方を求めるため、右のような7個のワクを並べておき、このワクの中に「右」4個と「上」3個を入れていけばよい。

ということは、7個のワクから「上」を入れるべき3個のワクを選んで、まず「上」を入れ、残りのワクには「右」の文字を書き入れれば、7個の文字の並べ方が1つできる。



【解き方 2】

（1） 求めるべき行き方は、「7個のものから3個を選ぶ組合せ」と同じで、

$$ {}_7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35 \text{ 通り} $$

（2） A → C は3個から上を1個を選び（${}_3C_1$）と、C → B は4個から上を2個を選べばよい（${}_4C_2$）から、

$$ {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times \frac{4\times3}{2\times1} = 3\times6 = 18 \text{ 通り} $$　　したがって、

C 地点を通らずに行く方法は、

35 － 18 ＝ 17 通り