15章 立体図形 の「偏差値20アップ・指導法」

20アップ指導法のまとめ

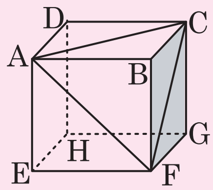
根本原理
- ① 切断と三角すい
- ② 体積図
- ③ 円すい

1 導 入 →（関連づける）→ 2 例題で解説 →（関連づける）→ 3 問題演習

1 導 入 →（関連づける）→ 3 問題演習

※ このように、「①導入で根本原理」をしっかり指導し、「②その根本原理を例題でイメージさせ」、その後に自習として「③問題演習をさせる」と、うそのように簡単に成績は上がるのです。下の具体例で確認してください。

２０アップ攻略法 ① ▶ 立方体の「1/6切断・1/24切断」を利用できるようになろう！



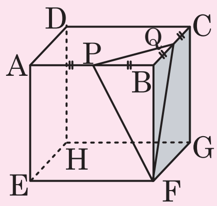
1 立方体の $\frac{1}{6}$ 切断

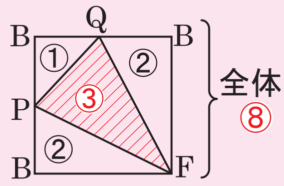
「三角すい B-ACF の体積」 ＝ 「立方体の体積」 × $\frac{1}{6}$

2 立方体の $\frac{1}{24}$ 切断

① 「三角すい B-PQF の体積」 ＝ 「立方体の体積」 × $\frac{1}{24}$

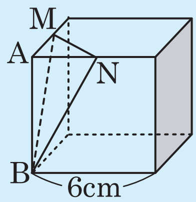
② 「切り口 PQF の面積」 ＝ 「正方形 ABCD の面積」 × $\frac{3}{8}$





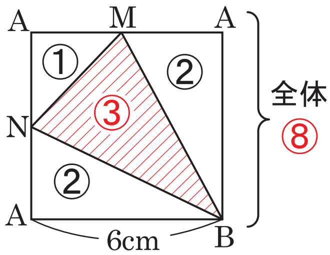
例題 1 立方体の切断 …「1/24切断」と「高さの比」

右の図の点 M,N は、立方体の辺の真ん中の点です。このとき、
① 三角形 MNB の面積と、
② 三角すい A-BMN の底面を三角形 MNB にしたときの高さを求めなさい。



【考え方】

① 「$\frac{1}{24}$ 切断」された三角すい A-MNB の展開図は、右のような正方形となり、△AMN ：△AMB ：△MNB　は、
（３×３÷２）:（３×６÷２）:（６×６−4.5 − ９×２）＝ ① ： ② ： ③ より、
（三角形 MNB の面積）:（正方形の面積） ＝ ③ ： ⑧　となる。



② 三角形 AMN を底面にしたときと、三角形 MNB を底面にしたときとでは、「体積は一定」だから、「高さ比」と「底面積比」とは“逆比”となる。

【解き方】

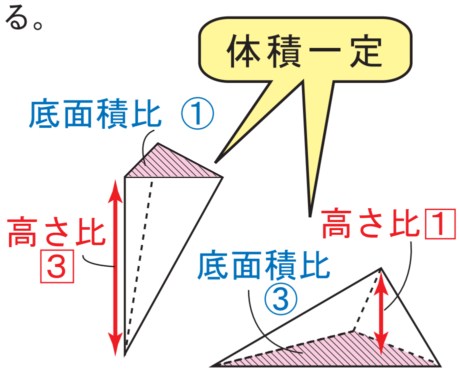
① 「切り口 MNB の面積」は、「正方形の面積」の $\frac{3}{8}$ だから、

$$6 \times 6 \times \frac{3}{8} = 13.5\,\text{cm}^2$$

② 三角形 AMN を底面にしたときも、三角形 MNB を底面にしたときも、どちらも「体積は同じで、一定」だから、「高さ比」と「底面積比」とは“逆比”となる。
したがって、

（底面積比） ＝ ① ： ③　　より、
（高さ比） ＝ $\boxed{3}$ ： $\boxed{1}$　　となるから、

$$6 \times \frac{\boxed{1}}{\boxed{3}} = 2\,\text{cm}$$



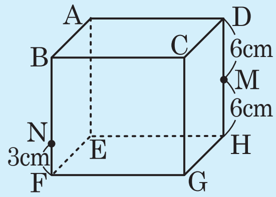
【別解】 三角すいの体積を1とすると、

$$（高さ比） = \frac{（体積）}{（底面積）} = \frac{1}{①} : \frac{1}{③}$$

$$= \boxed{3} : \boxed{1}$$

例題２　立方体の切断　２　…　「相似比」から「体積比」を導いて解く問題！

右の図の立方体を、3点 A , M , N を通る平面で切って２つの立体に分けたとき、頂点 E を含む立体の体積を求めなさい。

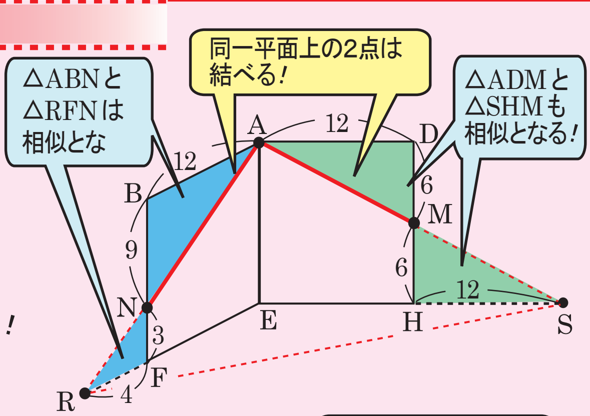


２０アップ攻略法 ②　切断図形の描き方のコツ！

【切断のコツ1】 … 同一平面上の2点は結べる！　さらに

⇒ 延長線上に、相似の三角形が描ける！

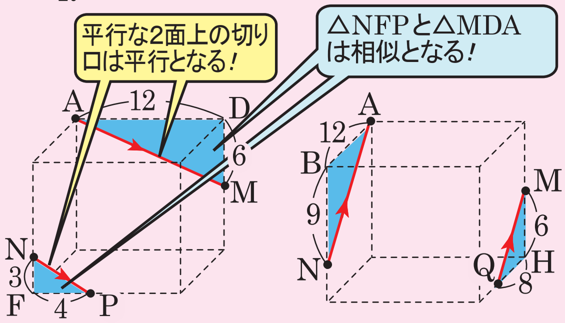
- ●右図のように、点 A と N は、同一面 (正方形 ABFE) 上にあるから、この2点を結べば、それが切り口となる。
- ●さらに、切り口 AN、AM を延長した点 R、S も同一平面上だから結べる ⇒ たいてい、切り口は「三角形の一部」となる！
- ●さらに、△ABN と△RFN は相似となる！
- ●さらに、△ADM と△SHM も相似となる！



【切断のコツ2】 … 向かい合う平行な2面上の切り口は平行！

さらに、⇒ 向かい合った三角形は相似となる！

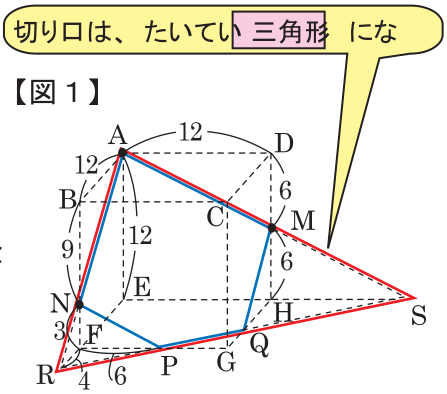
- ●面 AEHD と面 BFGC は平行な面であるから、この2面上の切り口 AM と NP も、平行となる。
- ●さらに、△ADM と△PFN は相似となる！
- ●さらに、△ABN と△QHM も相似となる！



【切断面の描き方】

- ● まず、切断面の描き方にコツがあります。立体図形は、「タテ軸、ヨコ軸、高さ軸」の3つの軸がある3D（3次元）のため、切り口を延長するとそのほとんどが3つの軸と交り、3つの交点ができる。このため、切り口は「三角形」の一部となることに着目する。(【図1】)
  本問の場合三角形 ARS 上に切り口 ANPQM がある。
- ● 立方体を切断する場合、切断された図形は、たいてい、「三角すい」になるので、最終的に三角すいを描くようにする。
  本問の場合、三角すい A-ERS ができる。(【図2】)
- ● 「相似の三角すい」が何個か必ず描けるので、「相似比」から⇒「体積比」を利用して解く。(【図3】)

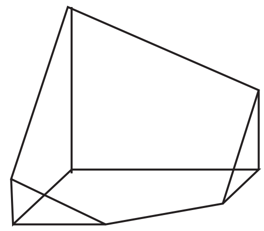
【図１】



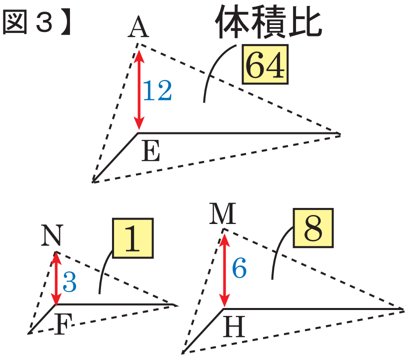
【解き方】

- ● 求める立体は、三角すい A-ERS から、三角すい N-FRP と三角すい M-HQS を引いた図形となる。(【図2】)
- ● 右の【図1】で、△NFP と△MDA は相似だから、
  NF : FP ＝ MD : DA ＝ ６ : １２ ＝ １ : ２　より、
  FP ＝ ３ × ２ ＝ ６cm
  △NFR と△NBA も相似だから、
  NF : FR ＝ NB : BA ＝ ９ : １２ ＝ ３ : ４　より、
  FR ＝ ４cm
- ● ３つの三角すい A-ERS、N-FRP と M-HQS は相似で、
  相似比 ＝ AE : NF : MH ＝ １２ : ３ : ６ ＝ ４ : １ : ２ より、
  体積比 ＝ (4×4×4) : (1×1×1) : (2×2×2) ＝ $\boxed{64}$: $\boxed{1}$: $\boxed{8}$
  これより、求める体積は、
  (三角すい N-FRP) × { $\boxed{64}$ − ($\boxed{1}$ ＋ $\boxed{8}$) }
  $= 4 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{3} \times \boxed{55} = 660\ \text{cm}^3$

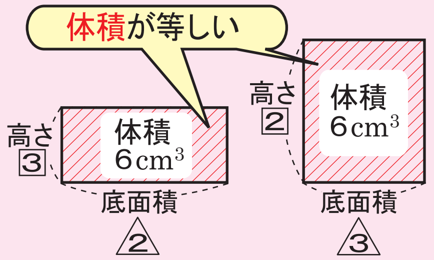
【図２】



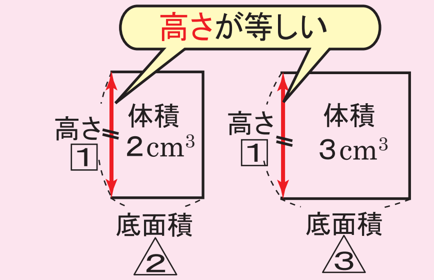
【図３】



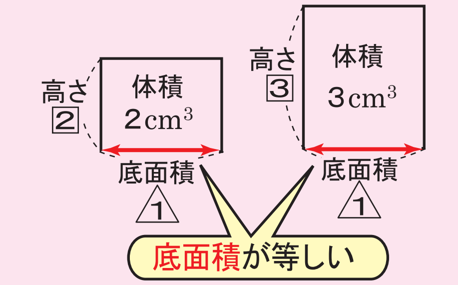
２０アップ攻略法 ③ ▷ 体積と比の問題は ⇒ 「体積図」を使えるように！



高さ比と底面積比は“逆比”



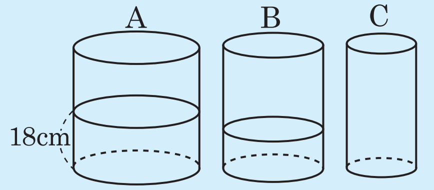
体積比と底面積比は“正比”



体積比と高さ比は “正比”

例題３ 「水の深さの比」と「底面積比」① … 体積一定のとき⇒深さの比と底面積比は「逆比」！

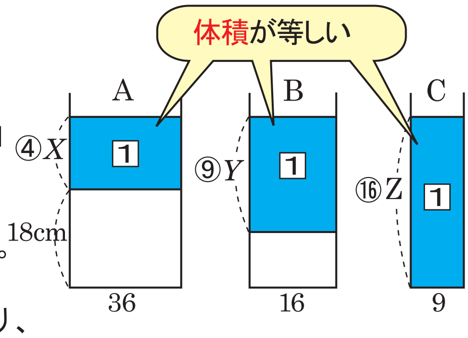
右の図のような円柱の容器 A、B、C があり、A には１８cm の深さまで、B にもいくらかの水が入っていますが、C は空です。また、底面の半径は、A が６cm、B が４cm、C が３cm です。いま、３つの容器に等しい量の水を入れたところ、水の深さはどれも等しくなりました。水の深さは何 cm になりましたか。



【考え方】

● 円柱、四角柱の場合、そのままの見取り図を描いている時間はないし、描く必要もない。真正面から見た図（体積図）を描いて、比で解くのがコツ！

● 「等しい量の水」＝「体積一定」の場合⇒「深さ比」と「底面積比」が「逆比」となる。⇒ これをすぐにイメージできるようになろう！



【解き方】

● 「等しい量の水」＝「体積一定」の時、「深さ比」と「底面積比」が「逆比」となる。

● そこで、容器 A と B と C の底面積比は、

底面積比 ＝（６×６）:（４×４）:（３×３）＝ ３６ : １６ : ９ より、

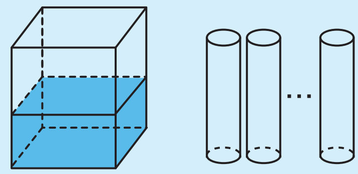
深さ比 $= X : Y : Z = \frac{1}{36} : \frac{1}{16} : \frac{1}{9}$ ＝ ④ : ⑨ : ⑯ したがって、 ⑯ー④ ＝ ⑫ … １８cm より、

１８ ÷ ⑫ ＝ １．５ cm … ① 当たりの深さ したがって、

● 水の深さ ＝ １．５ × ⑯ ＝ ２４cm

例題４ 「水の深さの比」と「底面積比」② … 体積一定のとき⇒深さの比と底面積比は「逆比」！

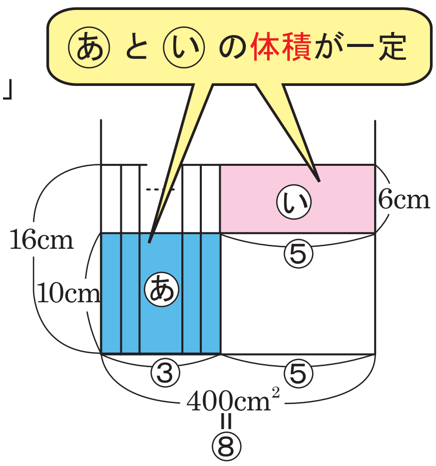
右の図のような底面が１辺２０cm の正方形の形をした直方体の水そうに１０cm の高さまで水が入っています。この水そうに、底面積が２５cm²、高さが１６cm の円柱を何本入れると水位が円柱と同じになりますか。



【考え方】

● 例題３と同様に、真正面から見た図（体積図）を描いて、比で解くのがコツ！

● 「等しい量の水」＝「体積一定」の場合 ⇒ 「深さ比」と「底面積比」が「逆比」となる。⇒ これをすぐにイメージできるようになろう！



【解き方】

● 右の図で、何本かの円柱が水につかっている部分の体積（図の あ）と、水位が上がった分の体積（図の い）が等しいので、「体積一定」だから、「深さ比」と「底面積比」が「逆比」となる。

● そこで、あ と い で、

「 深さ比（たての比）」＝ １０cm : ６cm ＝ ５ : ３ より、

「 底面積比（横の比）」＝ ③ : ⑤

● これより、あ の横（円柱の底面積の合計）は、

$400 \times \frac{③}{⑧} = 150\text{cm}^2$ より、円柱の本数は、

１５０ ÷ ２５ ＝ ６本

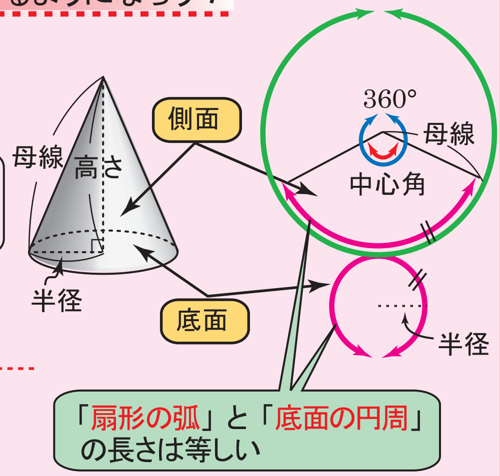
２０アップ攻略法 ④ ▷ 「円すいの2公式」を完全に使いこなせるようになろう！

1 ［円すいの中心角］の公式 … $\dfrac{\text{中心角}}{360^\circ} = \dfrac{\text{半径}}{\text{母線}}$

【公式の説明】← 問われることもあるので、しっかり理解すること！

$\dfrac{\text{中心角}}{360^\circ}$ ＝ ｛全体 360°に対する中心角の割合｝ ＝ ｛扇形の円周に対する扇形の弧の割合｝

＝ ｛扇形の円周に対する底面の円周の割合｝ ＝ $\dfrac{\text{半径}\times\cancel{2}\times\cancel{3.14}}{\text{母線}\times\cancel{2}\times\cancel{3.14}}$ ＝ $\dfrac{\text{半径}}{\text{母線}}$



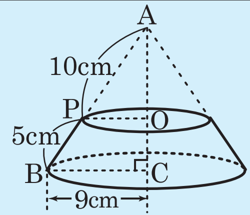
2 ［円すいの側面積］の公式 … 母線 × 半径 × 3.14

【公式の説明】← 問われることもあるので、しっかり理解すること！

側面積 ＝ 母線 × 母線 ×3.14 × $\dfrac{\text{中心角}}{360^\circ}$ ＝ $\cancel{\text{母線}}$ × 母線 ×3.14 × $\dfrac{\text{半径}}{\cancel{\text{母線}}}$ ＝ 母線 × 半径 ×3.14

例題５ 円すい …「円すいの公式」と「比」を使いこなせるようになろう！

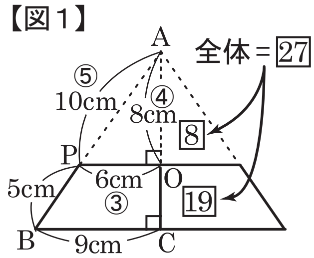
右の図の円すいを、AB 上の点 P を通り底面に平行な面で2つの立体に切り分けます。このとき、切り口の下側にできる立体（円すい台）の体積と表面積を求めなさい。



【戦略的学習のコツ】

● 円すいは、非常によく出ます。「公式」と「その考え方」を覚えるのは当たり前ですが、体積や表面積は、通常の解き方に加えて、「比」で解くことを意識して学習することが成績アップのコツになります。

【図１】



【解き方】

● 正面から見ると【図1】のように△APO と△ABC は「ピラミッド相似」となる。
相似比は、10：15 ＝ 2 ： 3 だから、

PO ＝ 9 × $\dfrac{2}{3}$ ＝ 6cm　　したがって、

● △APO は、③ ： ④ ： ⑤ の直角三角形と分かるから、

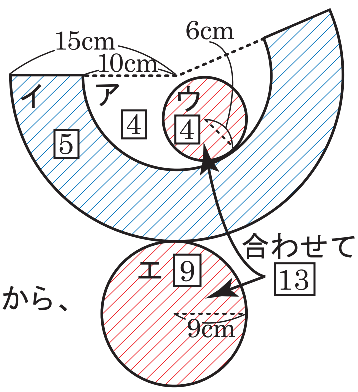
AO ＝ 6 × $\dfrac{4}{3}$ ＝ 8cm

● 大きい三角すいから小さい三角すいを引いても求まるが、さらにレベルアップを図るために、ここで、「体積比」を利用した解き方をマスターするとよい。
（小さい三角すい）と（大きい三角すい）の体積比は、相似比 ＝ 2：3より、
体積比 ＝（2×2×2）:（3×3×3）＝ $\boxed{8}$: $\boxed{27}$ だから、
（小さい三角すい）と（円すい台（プリン型））の体積比は、
体積比 ＝ 8：（27－8）＝ $\boxed{8}$: $\boxed{19}$ 　したがって、

● 求める円すい台（プリン型）の体積は、（小さい三角すいの体積の $\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{8}}$ 倍）となるから、

（6 × 6 × 3.14）× 8 × $\dfrac{1}{3}$ × $\dfrac{\boxed{19}}{\boxed{8}}$ ＝ 715.92 cm^3

【図２】



● 次に、表面積も、「面積比」を利用した解き方をマスターするとよい。
（小さい三角すい）と（大きい三角すい）の底面積比と側面積比は、相似比 ＝ 2：3 より、
底面積比 ＝ 側面積比 ＝（2×2）:（3×3）＝ $\boxed{4}$: $\boxed{9}$ 　また、
（小さい三角すいの側面積）と（円すい台（プリン型）の側面積）の比は、
4 ：（9－4）＝ $\boxed{4}$: $\boxed{5}$ 　だから、

● 求める円すい台（プリン型）の表面積は、

$\underbrace{6 \times 6 \times 3.14 \times \dfrac{\boxed{4}+\boxed{9}}{\boxed{4}}}_{\text{（底面積 ウ+エ）}} + \underbrace{10 \times 6 \times 3.14 \times \dfrac{\boxed{5}}{\boxed{4}}}_{\text{（側面積 イ）}} = 602.88\ \text{cm}^2$