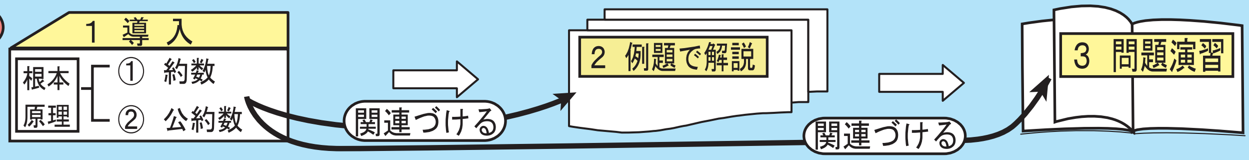
3章　約数の「偏差値２０アップ・指導法」

まとめ



※　このように、「①導入で根本原理」をしっかり指導し、「②その根本原理を例題でイメージさせ」、その後に自習として「③問題演習をさせる」と、うそのように簡単に成績は上がるのです。下の具体例で確認してください。

3. 1　導入（約数の根本原理を指導）

1　約数の意味…初めて学ぶ際に約数の意味を具体的に捉えさせるところが、20アップ・ノウハウ

● 約数が苦手となる理由 …　通常の塾では、4年生の頃に、ざっと「約数の意味」を指導しますが、ここで、「約数の意味」を確実に捉え切れていない子が多く、後々、「約数の問題が苦手」ということになっています。このため、初めて「約数」を指導する際に、「約数・公約数・最大公約数の意味」をしっかりイメージ（映像）として捉えさせ、マスターさせることが重要です。決しておろそかにしてはいけません。

20アップ攻略法 ① ▶ 約数・公約数・最大公約数・素数の意味を覚えろ！

（1） 約数 … ある整数（みかん12個）を、割り切ることができる整数（3人や4人など）を、整数12の約数という。（12の約数は、12を割ることができる　1, 2, 3, 4, 6, 12となる。）

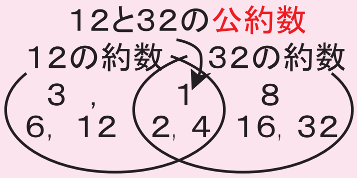
12個　÷　3人（約数）　＝　4個ずつ（約数）　⇒　A　÷　B（約数）　＝　C（約数）　の位置で覚えろ！

⇩

12　＝　3　×　4　　　A　＝　B　×　C　の形でも覚えろ！

※【約数の見つけ方】…　このように、積が12となる2つの数を一組として考えます。（例えば、3×4＝12なので、3と4は12の約数となります。）
したがって、12の約数は、1×12、2×6、3×4より、{1, 2, 3, 4, 6, 12}となります。

（2） 公約数 …　2つ以上の整数（例えば12と32）に共通な約数（12と32の両方を割ることができる整数。）
（12の約数…1, 2, 3, 4, 6, 12）
（32の約数…1, 2,　 4, 8, 16, 32）



（3） 最大公約数 …公約数のうち、最大のもの（12と32の最大公約数は4）

※【公約数の見つけ方】…　①　まず、12と32の最大公約数4を求め、
②　次に、その最大公約数の約数{1, 2, 4}を求める。←これが公約数

【例】（1）　24の約数を全て求めなさい。
（2）　24と32の公約数を全て求めなさい。

（1）　24の約数は、 1×24、 2×12、 3×8、 4×6と表せるから、
{1,　2,　3,　4,　6,　8,　12,　24}

（2） 公約数は、 最大公約数の約数だから、
24と32の最大公約数は、 右の連除法より、 2×2×2＝8となるので、
8の約数は、{1,　2,　4,　8}。
したがって、 24と32の公約数は、{1,　2,　4,　8} となります。

20アップ･ノウハウ
公約数
＝最大公約数の約数

【連除法】

2)	24	32
2)	12	16
2)	6	8
	3	4

20アップ攻略法 ② ▶ 素数・互いに素・素因数分解の意味を覚えろ！

(1) 素数 … 約数が、1とその数自体の2つしかない数（約数が2個）。
（例　2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 … ）
※ 1 は素数ではないので、しっかり覚えること。

(2) 互いに素 … 2つ以上の整数AとB（例えば7と13）に、公約数が1の1つしかないとき、この2つの整数AとB（7と13）は、「互いに素」という（公約数が1の1個だけの2数以上）
（例　3と5、5と7、7と13、などは、どれも約数が1個だけだから「互いに素」。）

(3) 素因数分解 … ある整数（例えば12）を、素数の積の形に分解することを。

【例】 1～20までの整数のうち、
① 約数が2個の数(素数)を求めなさい。
② 約数が3個の数を求めなさい。
③ 約数が4個の数を求めなさい。

それぞれの数を、素因数分解すると、
1,　2,　3,　4=(2×2),　5,　6=(2×3),　7,　8=(2×2×2)
9=(3×3),　10=(2×5),　11,　12=(2×2×3),　13,　14=(2×7)
15=(3×5),　16=(2×2×2×2),　17,　18=(2×3×3),　19,
20=(2×2×5)　したがって、
① 約数が2個の数(素数) ⇒ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
② 約数が3個の数 ⇒ 4, 9
③ 約数が4個の数 ⇒ 6, 8, 10, 14, 15

20アップ·ノウハウ

約数の個数(3, 5を例とする)
① 約数が2個 ⇔ 素数(3, 5…)
② 約数が3個 ⇔ 素数の平方数
(3×3, 5×5…)
③ 約数が4個 ⇔ 素数の立法数
(3×3×3, …)
素数の積
(2×7, 3×5, …)

【例】 6と12、8と15のうち、「互いに素」であるのはどちらですか。

6と12の公約数 … 1, 2, 3, 6
8と15の公約数 … 1 ⇒ よって、公約数が1の1つしかない2数が「互いに素」だから、8と15が「互いに素」

20アップ攻略法 ③ ▶ 約数の個数の求め方は、場合の数でイメージとして覚えろ！

(1) 約数の個数の求め方 … 素因数分解して、A×B×B×C×C×C＝A^1×B^2×C^3だとしたら、
約数の個数は、（1＋1）×（2＋1）×（3＋1）＝2×3×4＝24個（通り）となります。

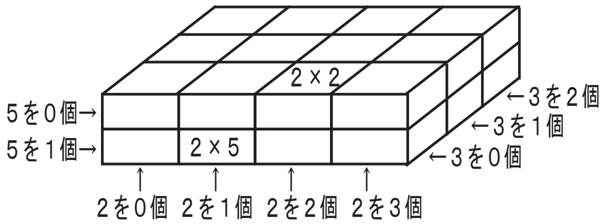
【例】 ① 18 の約数の個数を求めなさい。
② 360 の約数の個数を求めなさい。

① 18を素因数分解すると、
18＝2×3×3＝2^1×3^2 となるから、
約数は、（1＋1）×（2＋1）＝6個となります。
ちなみに、18の約数を全てあげると、
{1, 2, 3, 6, 9, 18} と6個あることが分かります。

② 360＝2×2×2×3×3×5＝2^3×3^2×5^1
となるから、 約数は、
(3＋1)×(2＋1)×(1＋1)＝24個となります。

	３を０個	３を１個	３を２個
２を０個	１×１	１×３	１×３×３
２を１個	２×１	２×３	２×３×３

２を０回か１回、３を０回か１回か２回掛け合せれば、全ての約数を表せるから、この組み合わせを求めればよい。図で表すと、上のマス目の数が約数の個数となる。



２を０回か１回か２回か３回、３を０回か１回か２回、５を０回か１回を、かけ合せれば、全ての約数を表せるから、図で表すと、上のマス目の数が約数の個数となる。

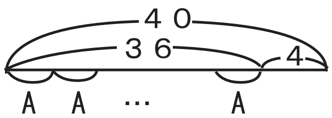
3．2　例　題（例題で根本原理を確認）

● ３．１の導入で学習した約数の「根本原理」が実際の問題で、どのように形を変えて聞かれるのかを次の例題で確認することが、偏差値２０アップノウハウでは重要です。

例題１　約数　と　あまり（１つの数の場合）

40を割ると4あまる整数をすべて求めなさい。

求める数をＡとすると、
　４０÷A＝Ｂあまり４　となる整数Ａを求めればよい。
初めの数４０からあまりの４を除くと３６となり、
割る数Ａは、A×B＝３６と表せる。つまり、割る数Ａは、
　①　３６（＝A×B）の約数であり、
　②　あまりの４より大きい数である。
①より、３６の約数を求めると、下の９個あります。
　３６の約数…１，２，３，４，６，９，１２，１８，３６
②より、Ａは４より大きい数整数ですから、
　６，９，１２，１８，３６の５個となります。



３６を割り切れる数
（約数）は、
1×36　2×18　3×12
4×9　6×6　より求まる。

答え　６，９，１２，１８，３６

２０アップ･ノウハウ

①「～を割る」という
割る数□を求める問題
÷□の形⇒約数の問題

②「～で割る」という
割られる数□を求める
問題
□÷ の形⇒倍数の問題

③ あまりは引き
⇒割り切れる形に

④ あとは約数を求める

⑤ 割る数はあまりよりも
大きい数である。

例題２　約数　と　あまり（２数の場合）

ある整数で、135を割ると3あまり、335を割ると5あまります。
（1）このような整数のうち、最も大きい数は何ですか。
（2）このような整数は全部で何個ありますか。

（１）求める数をＡとすると、
　１３５÷A＝Ｂあまり３
　３３５÷A＝Ｃあまり５　となる。
このような、整数Ａを求めればよい。
それぞれから、あまりを引くと、
　（１３５－３＝）１３２＝A×B
　（３３５－５＝）３３０＝A×Cとなるから、
Ａは、１３２と３３０の共通の約数（公約数）である。
このうち最も大きい数は最大公約数だから、６６

2	132	330
× 3	66	165
× 11	22	55
	2	5

したがって、
最大公約数は、
２×３×１１＝６６

（２）１３２と３３０の公約数は、最大公約数６６の約数だから、
　１，２，３，６，１１，２２，３３，６６　の８個ある。
求める整数は、あまりの３や５より大きい数だから、
答えは、　６，１１，２２，３３，６６の５個となる。

答え（１）６６（２）５個

２０アップ･ノウハウ

①「～を割る」という
割る数□を求める問題
÷□の形⇒約数の問題

②「～で割る」という
割られる数□を求める
問題
□÷ の形⇒倍数の問題

③あまりは引き
⇒割り切れる形に

④ 132も割り切れ、330も割り切れるような共通する約数は公約数。

２０アップ･ノウハウ

① 公約数は
⇒最大公約数の約数

② 割る数はあまりよりも
大きい数である。