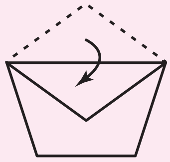
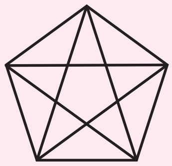
6　平面図形（正五角形の分割・等積変形）⇒ 確実に解けなければならない問題（偏差値65）

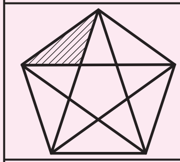
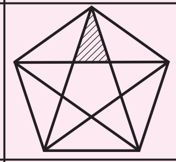
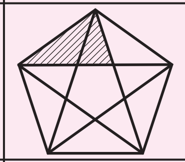
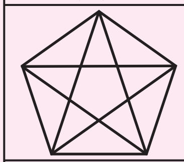
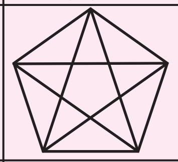
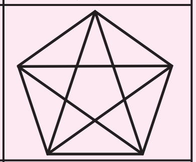
図1のように、正五角形を2つの頂点を通る直線で折り、折り目をつけます。これをくり返し行うと、図2のような折り目がつきます。次の問いに答えなさい。



【図１】

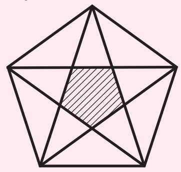


【図２】

(A)	(B)	(C)
		
個	個	個
(D)	(E)	(F)
		
個	個	個

(1)　図2の中には、どのような三角形がありますか。右の表の(A)、(B)、(C)、… の三角形は、図2の中にそれぞれ何個ありますか。右の表に記入しなさい。

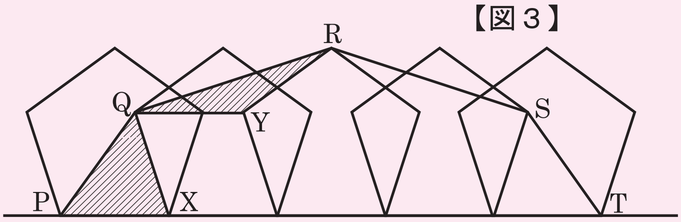
次に面積について考えます。たとえば、(C)の面積は、(A)1個の面積と(B)1個の面積を加えたものなので、(A)×1＋(B)×1と表します。(B)の面積は(C)1個の面積から(A)1 個の面　積を引いたものなので、(C)×1ー(A)×1と表します。同じように(A)2個の面積と(B)3個の面積を加えたものは、(A)×2＋Ⓑ×3と表します。



【図３】

(2)　図3の斜線部分の五角形の面積を、(1)の表と(A)と(B)の面積を用いて表しなさい。

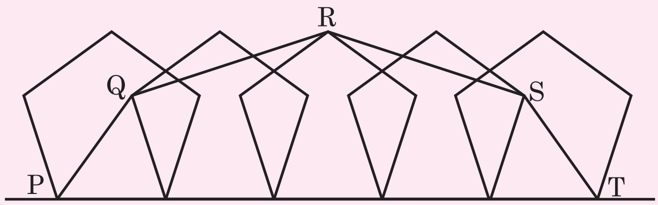
次に図1の正五角形5個を、図4、図5のように置き、点P、Q、R、S、T、X、Yをきめます。



【図４】

(3)　三角形QPXと三角形QYRの面積を、それぞれ(1)の表の Ⓐ と Ⓑ の面積を用いて表しなさい。

(4)　五角形PQRSTの面積を、(1)の表の Ⓐ と Ⓑ の面積を用いて表しなさい。また、この面積は図1の正五角形の面積の何倍になりますか。



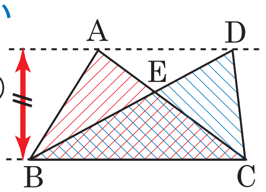
【図５】

根本原理　「正五角形の分割」と「等積変形」！

等積変形

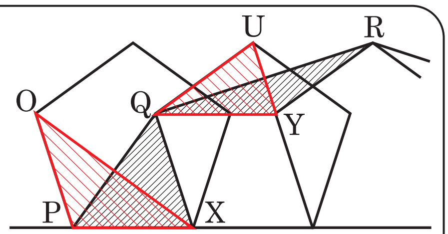
「底辺」と「高さ」が等しい三角形は、
⇒ 面積が等しい(等積)

△ABC ＝ △DBC
△ABE ＝ △DEC



本問では、右図より

△QPX ＝ △OPX
△RQY ＝ △UQY



攻略法　(1)を「等積変形」して、再利用できるかが問われている！

(1)　正五角形の分割はパターン化されているので事前に覚えている子が有利である。(2)、(3)は(1)の(A)～(E)を等積変形させているだけの基本的問題であるが、以外に賢い子ほど分割をしようとしてはまってしまうかもしれない。(4)は、(3)を利用して解く過程で正五角形の面積も分析できると、なおスピードアップがはかれる。

麻布中学の最終問題ということで、難しそうに感じさせているにすぎない。最近の傾向として、(1)で試行させて、(2)以降で利用させるタイプと気付けたかどうか。また等積変形の視点が持てるかどうかを聞いている。

解き方　「正五角形の分割」と「等積変形」を利用して楽に解け！

(1)　右の【図1】のように(A)、(B)、(C)、(D)、(E)5種類となり、それぞれの個数は、【図1】のとおりである。

(2)　まず、右の【図1】の(D)を(A)と(B)で表わすと、

(D) ＝ (A)×2 ＋ (B)×1 と表わせる。

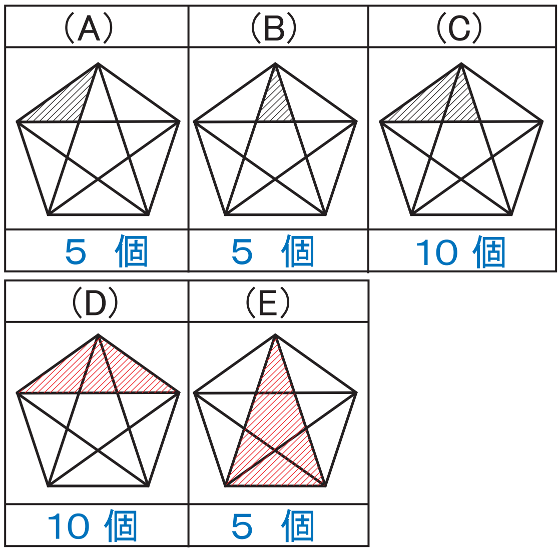
次に、右の【図2】の △BHE は△ABE つまり(D)と合同で、面積が等しい。

また、△BGF は△AFJ つまり(A)と合同で、面積が等しい。

よって、求める斜線部分の面積は、

(D)－(B)×2＝{(A)×2＋(B)×1}－(B)×2

＝ (A)×2 － (B)×1

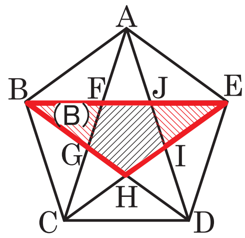


【図１】

(3)　右の【図3】において、「等積変形」を利用すると

△QPX ＝ △OPX ＝ (D) ＝ (A)×2 ＋ (B)×1

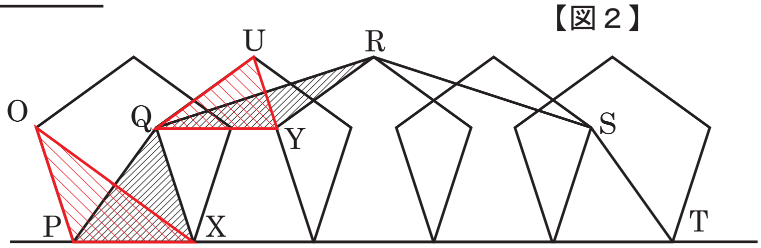
△QYR ＝ △QYU ＝ (C) ＝ (A)×1 ＋ (B)×1



【図２】

(4)　この問題は、この問題単独で図形を分割して解こうとするのではなく、上手に(3)を利用できるかが勝負である。

(3)を利用すると、右の【図4】のように分析でき、



【図３】

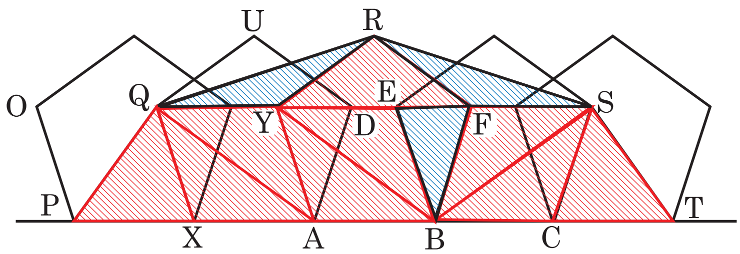
△QPX＝(D)と等しい三角形が、9コ

(赤い斜線部分)

△QYR＝(C)と等しい三角形が、3コ

(青い斜線部分)

できるから、



【図４】

(五角形PQRST) ＝ {(A)×2＋(B)×1}×9 ＋ {(A)×1＋(B)×1}×3

＝(A)×21＋(B)×12

となり、

(【図1】の正五角形) ＝ {(D)×3＋(C)×1}

＝　{(A)×2＋(B)×1}×3 ＋ {(A)×1＋(B)×1}

＝(A)×7＋(B)×4　より

{(A)×21＋(B)×12}　÷　{(A)×7＋(B)×4)}　＝　３ 倍