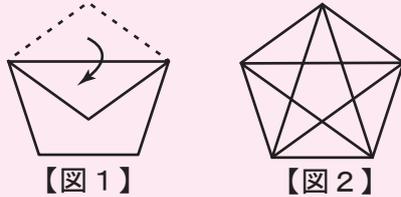


# 麻布中 — 注目問題 詳細解説 (その2) — 2006年[平成18年]

## 6 平面図形(正五角形の分割・等積変形) ⇒ 確実に解けなければならない問題(偏差値65)

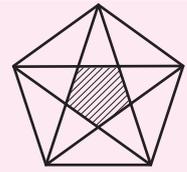
図1のように、正五角形を2つの頂点を通る直線で折り、折り目をつけます。これをくり返し行くと、図2のような折り目がつきます。次の問いに答えなさい。



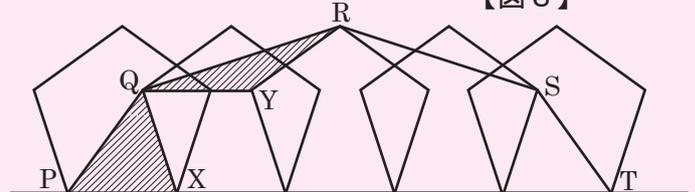
(A) 	(B) 	(C) 
個	個	個
(D) 	(E) 	(F) 
個	個	個

(1) 図2の中には、どのような三角形がありますか。右の表の(A)、(B)、(C)、…の三角形は、図2の中にそれぞれ何個ありますか。右の表に記入しなさい。

次に面積について考えます。たとえば、(C)の面積は、(A)1個の面積と(B)1個の面積を加えたものなので、 $(A) \times 1 + (B) \times 1$ と表します。(B)の面積は(C)1個の面積から(A)1個の面積を引いたものなので、 $(C) \times 1 - (A) \times 1$ と表します。同じように(A)2個の面積と(B)3個の面積を加えたものは、 $(A) \times 2 + (B) \times 3$ と表します。

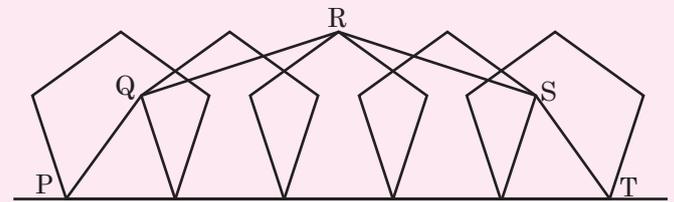


(2) 図3の斜線部分の五角形の面積を、(1)の表と(A)と(B)の面積を用いて表しなさい。



次に図1の正五角形5個を、図4、図5のように置き、点P、Q、R、S、T、X、Yをきめます。

(3) 三角形QPXと三角形QYRの面積を、それぞれ(1)の表の(A)と(B)の面積を用いて表しなさい。  
 (4) 五角形PQRSTの面積を、(1)の表の(A)と(B)の面積を用いて表しなさい。また、この面積は図1の正五角形の面積の何倍になりますか。

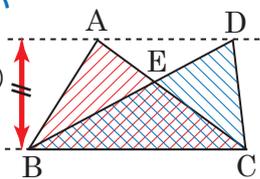


### 根本原理 「正五角形の分割」と「等積変形」!

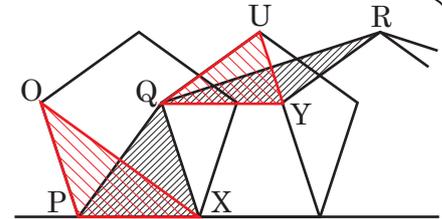
#### 等積変形

「底辺」と「高さ」が等しい三角形は、  
 ⇒ 面積が等しい(等積)

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle DBC \\ \triangle ABE &= \triangle DEC \end{aligned}$$



本問では、右図より  
 $\triangle QPX = \triangle OPX$   
 $\triangle RQY = \triangle UQY$



### 攻略法 (1)を「等積変形」して、再利用できるかが問われている!

(1) 正五角形の分割はパターン化されているので事前に覚えている子が有利である。(2)、(3)は(1)の(A)~(E)を等積変形させているだけの基本的問題であるが、以外に賢い子ほど分割をしようとしてはまってしまいかもれない。(4)は、(3)を利用して解く過程で正五角形の面積も分析できると、なおスピードアップがはかれる。麻布中学の最終問題ということで、難しそうに感じさせているにすぎない。最近の傾向として、(1)で試行させて、(2)以降で利用させるタイプと気付けたかどうか。また等積変形の視点が持てるかどうかを聞いている。

# 解き方

## 「正五角形の分割」と「等積変形」を利用して楽に解け！

(1) 右の【図1】のように(A)、(B)、(C)、(D)、(E)5種類となり、それぞれの個数は、【図1】のとおりである。

(A)	(B)	(C)
5 個	5 個	10 個
(D)	(E)	
10 個	5 個	

(2) まず、右の【図1】の(D)を(A)と(B)で表わすと、

$$(D) = (A) \times 2 + (B) \times 1 \text{ と表わせる。}$$

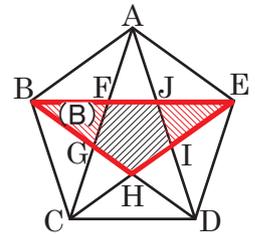
次に、右の【図2】の  $\triangle BHE$  は  $\triangle ABE$  つまり(D)と合同で、面積が等しい。

また、 $\triangle BGF$  は  $\triangle AFJ$  つまり(A)と合同で、面積が等しい。

よって、求める斜線部分の面積は、

$$\begin{aligned} (D) - (B) \times 2 &= \{(A) \times 2 + (B) \times 1\} - (B) \times 2 \\ &= \underline{\underline{(A) \times 2 - (B) \times 1}} \end{aligned}$$

【図1】



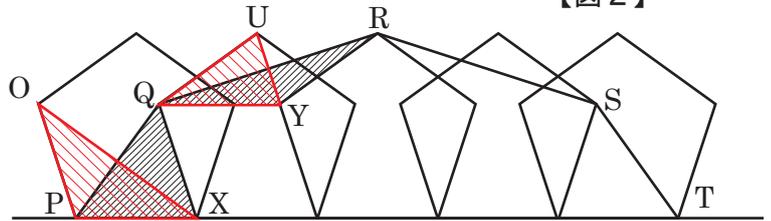
【図2】

(3) 右の【図3】において、「等積変形」を利用すると

$$\triangle QPX = \triangle OPX = (D) = \underline{\underline{(A) \times 2 + (B) \times 1}}$$

$$\triangle QYR = \triangle QYU = (C) = \underline{\underline{(A) \times 1 + (B) \times 1}}$$

(4) この問題は、この問題単独で図形を分割して解こうとするのではなく、上手に(3)を利用できるかが勝負である。(3)を利用すると、右の【図4】のように分析でき、



【図3】

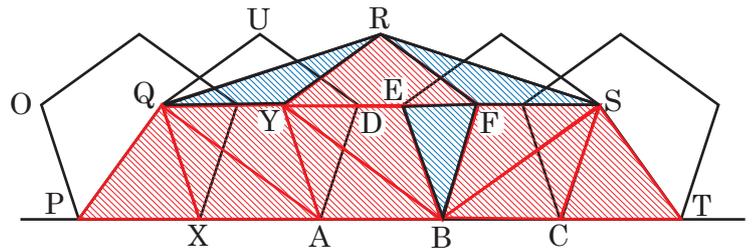
$\triangle QPX = (D)$  と等しい三角形が、9コ

(赤い斜線部分)

$\triangle QYR = (C)$  と等しい三角形が、3コ

(青い斜線部分)

できるから、



【図4】

$$\begin{aligned} (\text{五角形PQRST}) &= \{(A) \times 2 + (B) \times 1\} \times 9 + \{(A) \times 1 + (B) \times 1\} \times 3 \\ &= (A) \times 21 + (B) \times 12 \end{aligned}$$

となり、

$$([\text{図1}] \text{の正五角形}) = \{(D) \times 3 + (C) \times 1\}$$

$$= \{(A) \times 2 + (B) \times 1\} \times 3 + \{(A) \times 1 + (B) \times 1\}$$

$$= (A) \times 7 + (B) \times 4 \text{ より}$$

$$\underline{\underline{\{(A) \times 21 + (B) \times 12\} \div \{(A) \times 7 + (B) \times 4\} = 3 \text{ 倍}}}}$$